ANALISI MORFOLOGICA DELLE COPPELLE MEDIANTE RETI NEURONALI ARTIFICIALI

Adriano GASPANI
Giorgio DIMITRIADIS

Introduzione

Accade sovente che si rilevino numerose coppelle incise sui massi e sulle rocce presenti nelle valli alpine e in altri luoghi del mondo. La loro distribuzione spaziale sulla superficie occupata e' generalmente difficile da studiare, anche se recentemente l'applicazione di alcune tecniche basate sulle reti neuronali artificiali (Gaspani e Dimitriadis, 2000) ha permesso un trattamento maggiormente efficace del problema. Lo studio della distribuzione spaziale ci fornisce solo una parte dell'informazione contenuta nelle rappresentazioni non figurative, un'altra potenziale fonte di informazione risiede nella morfologia [di posizione e non di costruzione] individuale di ciascun elemento e nel confronto tra le differenze morfologiche esistenti tra ciascun elemento che concorre a formare la configurazione.

Scopo di questo lavoro e' quello di mettere a punto una metodologia oggettiva basata su solide basi matematiche e statistiche capace di estrarre in maniera del tutto automatica, affidabile e soprattutto oggettiva, l'informazione contenuta nella morfologia delle coppelle che formano le configurazioni rilevate. Dopodiché si prosegue all'analisi delle forme geometriche (Dimitridis 2001), secondo delle singole unità di misura, come si rileva nelle configurazioni di coppelle.

Informazione codificata nella morfologia di una coppella

Il problema di misurare quanta informazione sia contenuta nella morfologia dei singoli elementi che fanno parte di una configurazione di coppelle e' un problema di non facile soluzione. Dal punto di vista matematico e formale dobbiamo definire un insieme di parametri che possano codificare, seppur in maniera grossolana, le caratteristiche morfologiche di ciascuna coppella. Definiamo quindi, sul terreno, un sistema di riferimento costituito da due assi ortogonali orientati secondo la terna euleriana, cioè con l'asse Y diretto verso la direzione Nord astronomica, l'asse X diretto verso la direzione Est astronomica e l'asse Z diretto lungo la verticale locale, verso lo Zenith.Introduciamo ora, per ciascuna coppella, la variabile *Xm* cosi' definita:

$$Xm = Fn(\mathbf{u})$$

in cui **u** e' il vettore degli *n* generici diametri della m-esima coppella della configurazione misurati nelle varie direzioni lungo il piano della roccia e *Fn()* e' un operatore di aggregazione. La variabile *Ym* e' definita nel seguente modo:

$$Ym = Gn(\mathbf{p})$$

in cui **p** e' il vettore delle *n* generiche profondità della m-esima coppella della configurazione misurati nelle varie direzioni perpendicolarmente alla roccia e *Gn()* e' un operatore di aggregazione tale che:

$$Gn(.) := 2\ Fn(.)$$

Una possibile definizione potrebbe essere:

$$Fn(u) := 0.5 * (u1 * u2 * \ldots * un)^{1/n}$$

$$Gn(u) := (p1 * p2 * \ldots * pn)^{1/n}$$

La valutazione delle quantità *Xm*, *Ym* sono valutabili utilizzando una rete neuronale artificiale che accetta in input le componenti *u del vettore* **u** e quelle del *p* del vettore **p** e produce in output *N* coppie di coordinate aggregate *Xm* e *Ym* , una per ciascuna delle *m=1,...,N* coppelle che compongono la configurazione. La struttura della rete neuronale artificiale dipende strettamente dalla definizione dei due operatori di aggregazione da valutare. Ovviamente qualora in una configurazione siano presenti *N* coppelle, sarà necessario misurare 2 *n N* serie di elementi dei due vettori **u** e **p** e questo potrebbe essere eseguito dal computer in maniera automatizzata disponendo dei profili planimetrici e batimetrici delle singole coppelle che fanno parte della configurazione presente sulla roccia.

Modello matematico di una coppella

Il punto di partenza della presente analisi e' che la forma di una coppella sia ottenibile da una morfologia semisferica a cui sia aggiunto un termine di deformazione modellabile secondo una terna di funzioni stocastiche T(.) stazionarie con media zero e varianza arbitraria, ma non infinita. In questo modo sarà' possibile descrivere qualsiasi morfologia presentata da una coppella e sarà anche possibile trattarla utilizzando determinate tecniche statistiche. Da questo semplice modello discende il fatto che le dimensioni che giacciono sul piano della superficie incisa (diametri) e quella ortogonale (profondità) possono essere messe in relazione lineare come segue:

$$Ym = A + B\,Xm,$$

$$\text{con: } m = 1, \ldots, N.$$

Utilizzando le definizioni di Y e X stabilite in precedenza, e' facile osservare che nel modello semisferico ideale si verifica che: *T(x)=0, T(y)=0, T(z)=0* e quindi obbligatoriamente *A=0* e *B=1*.

Ovviamente le coppelle, vecchie di qualche migliaio di anni, che rileviamo sulle rocce sono ben lontane dal modello semisferico teorico; forse quando erano appena state scavate potevano forse assomigliare ad incavi di forma semisferica. Dal punto di vista sperimentale e' possibile misurare *Xm* e *Ym* per le coppelle di ciascuna configurazione e quindi calcolare *A* e *B* i quali ci diranno quanto gli elementi della configurazione si allontanano dal modello semisferico teorico, ma non dobbiamo dimenticare che sia *Xm* che *Ym* sono affetti da errore sperimentale quindi e' necessario che l'algoritmo di regressione sia generalizzato, cioè tenga conto delle deviazioni in entrambe le direzioni, X e Y allo stesso modo. Vediamo allora come e' possibile risolvere questo problema. Per prima cosa definiamo la funzione matematiche rappresenta la dipendenza lineare generalizzata tra X e Y. Essa sarà l'equazione della retta generica in coordinate polari:

$$X \sin(Q) - Y \cos(Q) + Ro = 0$$

in cui *Q* e' l'angolo della retta rispetto all'asse delle ascisse e *Ro* e' la distanza euclidea della retta dall'origine del sistema di assi cartesiani di riferimento. La soluzione del nostro problema richiede che si determini il valore ottimale dell'angolo *Q* e, ma meno importante, il coefficente *Ro*. I valori ottimali dei due parametri *A* e *B* saranno i seguenti:

$$B = a/(b+c)$$
$$A = \sin(Q)/\cos(Q)$$

in cui:

$$a = 2\,N\,cov(X,Y)$$

$$b = N\,\{\,var(X) - var(Y)\,\}$$

$$c = (\,a^2 + b^2\,)^{1/2}$$

Il procedimento descritto in questa sede e' differente dal calcolo della retta dei Minimi Quadrati in quanto in questo caso non viene minimizzata la somma dei quadrati degli scarti in direzione Y, bensì i quadrati delle deviazioni in direzione perpendicolare alla retta.

Casualita' e correlazione

Il grado di correlazione tra Xm e Ym può essere sperimentalmente misurato ottenendo il cosiddetto *coefficiente di correlazione lineare*, indicato con "*r*", il cui quadrato e' detto *coefficiente di determinazione*", il quale può essere calcolato nel modo seguente:

$$r = cov(X,Y) / \sqrt{(var(X)\ var(Y))}$$

in funzione della covarianza tra *Xm* e *Ym* e delle loro varianze individuali. Questo equivale a descrivere la distribuzione morfologica delle coppelle entro una configurazione mediante

una funzione densità di probabilità congiunta la quale sarà una distribuzione normale bivariata. Il fatto che una distribuzione morfologica sia caratterizzata da una possibile disposizione ordinata delle morfologie delle coppelle non ci assicura automaticamente che questo non avvenga in seguito a fenomeni casuali. E' possibile infatti che analizzando solamente un sottoinsieme delle coppelle che in origine costituivano la configurazione si arrivi a misurare un grado di correlazione relativamente elevato anche se la distribuzione morfologica complessiva delle coppelle e' del tutto casuale. Supponendo di misurare un coefficiente di correlazione significativamente elevato, dobbiamo calcolare la probabilità che il valore ottenuto sia vero; infatti e' talvolta possibile che dalla distribuzione casuale di N caratteristiche morfologiche si venga a formare casualmente una distribuzione abbastanza ordinata e quindi il coefficiente di correlazione misurato sia significativamente diverso da zero. La probabilità che ciò avvenga dipende dal numero degli elementi e dal grado di correlazione che può verificarsi. Dato un certo valore *R* per il coefficiente di correlazione osservato, la probabilità che *N* punti, che rappresentano le coppelle parametrizzate nello spazio X-Y, si dispongano casualmente in modo da far si che possa essere misurato un valore |*r*| uguale o maggiore di *R*, e' difficile da calcolare, ma e' possibile farlo. Il calcolo di questa probabilità e' possibile solo mediante integrazione numerica. La tabella seguente fornisce i valori della probabilità P(r,R) in funzione di N e R. (ricordiamo che N e' il numero di coppelle che compongono la configurazione).

Valori della probabilita' P(r,R)

	Coefficiente di Correlazione R										
N	*0.*	*.1*	*.2*	*.3*	*.4*	*.5*	*.6*	*.7*	*.8*	*.9*	*1.0*
3	*1.0*	*.94*	*.87*	*.81*	*.74*	*.67*	*.59*	*.51*	*.41*	*.29*	*.00*
6	*1.0*	*.85*	*.70*	*.56*	*.43*	*.31*	*.21*	*.12*	*.06*	*.01*	*.00*
10	*1.0*	*.78*	*.58*	*.40*	*.25*	*.14*	*.07*	*.02*	*.005*	*.00*	*.00*
20	*1.0*	*.67*	*.40*	*.20*	*.08*	*.02*	*.005*	*.001*	*.00*	*.00*	*.00*
50	*1.0*	*.49*	*.16*	*.03*	*.004*	*.00*	*.00*	*.00*	*.00*	*.00*	*.00*
60	*1.0*	*.45*	*.13*	*.02*	*.002*	*.00*	*.00*	*.00*	*.00*	*.00*	*.00*
70	*1.0*	*.41*	*.097*	*.012*	*.001*	*.00*	*.00*	*.00*	*.00*	*.00*	*.00*
80	*1.0*	*.38*	*.075*	*.007*	*.001*	*.00*	*.00*	*.00*	*.00*	*.00*	*.00*
90	*1.0*	*.35*	*.059*	*.004*	*.001*	*.00*	*.00*	*.00*	*.00*	*.00*	*.00*

100 1.0 .32 .046 .002 .000 .00 .00 .00 .00 .00 .00

Appare quindi evidente che se una distribuzione morfologica delle coppelle mostra un coefficiente di correlazione misurato *R*, la probabilità che tale valore sia simulato da una distribuzione casuale vale *P(r,R)*, quindi la probabilità che la distribuzione morfologica non sia casuale sarà data dal valore complementare:

$$P(non\ random) = 1 - P(r,R)$$

In questo modo data una distribuzione morfologica di coppelle all'interno di una configurazione, noi siamo in grado di valutare la probabilità che tale distribuzione derivi da un artefatto casuale.

L'Entropia della configurazione morfologica

La quantità di informazione mediamente contenuta nella morfologia delle coppelle che fanno parte della configurazione e' misurabile calcolando l'Entropia assoluta, indicata con *H*. Per fare questo sarà necessario calcolare le due varianze e la covarianza. La varianza e' in qualche modo una misura del contenuto di energia interna globale della distribuzione morfologica cosi' come si presenta. L'entropia complessiva delle coppelle sara' quindi valutabile in funzione della funzione densità di probabilità che caratterizza la loro distribuzione morfologica. Assumendo che la roccia contenga un numero sufficientemente

elevato di coppelle e' possibile assumere a priori che la funzione densità di probabilità si avvicini sufficientemente alla distribuzione Normale (Gaussiana) con media zero e varianza pari a quella misurata sperimentalmente. In questo caso la teoria diviene notevolmente semplificata ed e' possibile esprimere analiticamente l'entropia H dell'intera configurazione, in funzione della varianza, nel modo seguente (Haykin, 1994):

$$H = 0.5\ (\ 1 + \ln(2\ \pi\ \ var(d)\ )\ )$$

Nei casi in cui il numero di coppelle sia relativamente basso, diciamo inferiore a 10, allora e' più appropriato assumere che la funzione densità di probabilità si avvicini alla distribuzione uniforme anziché a quella normale. In questo caso l'entropia potrà essere valutata mediante la seguente relazione analitica (Proakis, 1988):

$$H = 0.5\ (\ 1 + \ln(\ 12\ var(d)\ )\ )$$

Osserviamo che nel caso della distribuzione uniforme, l'entropia risultante e' un poco maggiore rispetto a quella derivante dall'aver assunto una distribuzione Gaussiana, per la morfologia delle coppelle. L'entropia assoluta e', come detto in precedenza, il contenuto medio di informazione codificata nella configurazione morfologica globale delle coppelle; ciò significa che H e' la somma pesata delle *autoinformazioni Im*, cioè di ciascuna quantità di informazione associata al verificarsi dell'evento relativo al determinato profilo

batimetrico e forma planimetrica di una determinata coppella. La funzione peso e', in questo caso, la probabilità, qui indicata con *Pm* che la coppella sia caratterizzata proprio dalla morfologia rilevata sperimentalmente e formalmente data dal tipo:

$$H = \sum_{m=1}^{m=N} Pm\ Im$$

Dunque abbiamo qui introdotto un nuova quantità che e' stata denominata *autoinformazione*, misurata per ogni singola coppella presente nella configurazione, e indicata con *Im* dove l'indice *m* si riferisce alla coppella considerata tra quelle presenti nella configurazione.

Chiariamo un poco la questione. Data un coppella facente parte della configurazione in esame, il solo fatto che essa assuma un determinata morfologia espressa dai parametri morfologici *Xm* e *Ym*,implica che questo evento racchiude in se una certa quantità di informazione. Siccome *Im* e' l'informazione corrispondente all'evento: "*coppella caratterizzata da una determinata morfologia"*, essa viene denominata "*autoinformazione*" (*self-information*) associata a quell'evento. La Teoria dell'Informazione ci dice che l'autoinformazione associata ad un dato evento e' legata in maniera semplice alla probabilita' che tale evento si verifichi effettivamente. Tale legame si concretizza nella seguente equazione:

$$Im = -ln(Pm)$$

la quale mette in evidenza che un evento casuale che ha probabilità pari a 1 (=100%) di verificarsi, quindi e' un evento sicuro, avrà autoinformazione nulla in quanto la sicurezza che esso accada non richiede il verificarsi di particolari condizioni affinché' esso avvenga. Esso semplicemente accadrà sempre e in ogni caso, per cui non esisteranno particolari ragioni per meravigliarci se accade e quindi di cercare il motivo per cui l'evento si verifica.

Al contrario, un evento di probabilità bassa richiede che siano verificati contemporaneamente tutta una serie di fattori che concorrono al verificarsi dell'evento, altrimenti esso non si verifica affatto. E' chiaro che il verificarsi di un evento poco probabile racchiude dentro di se un alta quantità di informazione relativamente alle cause che hanno concorso a produrre quell'evento. Spingendoci al caso estremo: un evento che ha probabilità quasi nulla di verificarsi, se si verifica racchiude in se una quantità di informazione, molto elevata, per cui la sua autoinformazione tenderà all'infinito.

Tornando al caso delle coppelle che fanno parte di una configurazione, sarà' possibile associare a ciascuna di esse un valore di autoinformazione dipendente dalla sua morfologia e quindi sarà possibile calcolare la probabilità, per ciascuna coppella, che si possa essere verificata proprio quella morfologia. Tale probabilità si ottiene invertendo l'autoinformazione individuale nel modo seguente:

$$Pm = exp(Im)$$

$$(m=1,...,N)$$

Dal punto di vista pratico non e' possibile calcolare ciascuna probabilità individuale, cioè per ogni coppella, ma e' possibile solamente ottenere la valutazione complessiva di una funzione di disordine della configurazione, cioè l'Entropia. In questo caso potremo approssimare l'Entropia assoluta *H* con l'Entropia differenziale *h* di tutta la configurazione (Haykin, 1994) ottenendo:

$$H \sim h = -\sum_{m=1}^{N} Pm\ ln(Pm).$$

La Mutua Informazione

Dalla Teoria dell'Informazione otteniamo che la *Mutua Informazione I(X,Y)* relativa alla distribuzione morfologica complessiva delle coppelle che fanno parte di una configurazione e' legata al coefficiente di correlazione in maniera molto semplice:

$$I(X,Y) = -\ 0.5\ ln(\ 1 - r^2\ )$$

misurata in "*nats*" (acronimo anglosassone di "Natural Units"). La mutua informazione può essere vista come la quantità di informazione legata all'osservazione di una determinata distribuzione morfologica delle coppelle all'interno della configurazione. In questo caso la mutua informazione si riferisce non ad una sola coppella, ma a tutto l'insieme delle coppelle nella configurazione quindi ci fornirà importanti informazioni sulla struttura morfologica dell'insieme degli elementi che fanno parte di essa.

Dunque la mutua informazione non e’ altro che una generalizzazione del concetto di autoinformazione, quindi ne conserverà tutte le proprietà matematiche. Questo fatto ci conduce a poter calcolare la probabilità *Pc* che la distribuzione morfologica delle coppelle attualmente rilevata per una configurazione si potesse effettivamente verificare. Tale probabilità vale: $Pc = exp(-I(X,Y))$

La probabilità *Pc* ci suggerisce alcune considerazioni degne di nota. Infatti se la distribuzione morfologica delle coppelle e’ pressoché casuale allora il valore assoluto del coefficiente di correlazione risulta piuttosto basso e la mutua informazione pressoché nulla. Questo conduce ad avere una alta probabilità che quella distribuzione morfologica si potesse spontaneamente venire a formare nel corso degli anni, a causa dell’usura della roccia, dovuta al tempo. Se contrariamente a ciò la correlazione risulta elevata, si potrebbe anche ipotizzare che tutte le coppelle, o gran parte di esse, siano state prodotte nella stessa epoca e forse incise dalla stesa persona. In questo caso la mutua informazione sarà elevata in quanto una morfologia ordinata implica l’esistenza di una singola tecnica di incisione, che si traduce matematicamente nella codifica di una certa quantità di informazione nella distribuzione morfologica delle coppelle ottenuta applicando quel particolare criterio.

Un valore elevato di mutua informazione implica una bassa probabilità “Pc” che una disposizione cosi’ ordinata avesse potuto verificarsi. La probabilità dell’evento complementare, sarà: $Po = 1 - Pc$

e nel caso di una distribuzione morfologica ordinata, essa sarà elevata. La tabella seguente mette in evidenza i valori della mutua informazione $I(X;Y)$ e delle probabilità *Pc* e *Po* in funzione del coefficiente *r* di correlazione.

|r|	I(x;y)	Pc	Po
0.000	0.000	1.000	0.000
0.100	0.005	0.995	0.005
0.200	0.020	0.980	0.020
0.300	0.047	0.954	0.046
0.400	0.087	0.917	0.083
0.500	0.144	0.866	0.134
0.600	0.223	0.800	0.200
0.700	0.337	0.714	0.286
0.800	0.511	0.600	0.400
0.900	0.830	0.436	0.564
0.950	1.164	0.312	0.688
0.975	1.504	0.222	0.778
0.990	1.959	0.141	0.859
0.999	3.108	0.045	0.955
1.000	infinito	0.000	1.000

Osserviamo un fatto interessante e cioè che per avere la probabilità del 50% di distribuzione non casuale, il pattern di coppelle deve mostrare un coefficiente di cross-correlazione pari almeno a 0.87. La conclusione e’ che solamente una distribuzione che mostra una rilevante correlazione (r>87%) ha almeno il 50% di probabilità di non derivare da una morfologia casuale delle singole coppelle. Solo in questo caso potrà essere ipotizzata una eventuale correlazione tra una coppella e l’altra entro la configurazione.

Il problema della datazione delle configurazioni di coppelle

Il metodo descritto, se approfondito, potrebbe forse fornire qualche metodo per una possibile datazione delle coppelle. Prendendo in esame nuovamente la funzione di regressione: $Ym = A + B Xm$,
si vede che il parametro B e' quello importante, infatti se le coppelle sono state appena scavate allora la morfologia potrebbe essere abbastanza prossima al modello semisferico teorico, il quale prevede $B=1$.
L'usura a seguito del tempo modifica il profilo batimetrico allontanando la forma reale dal modello teorico semisferico ed in particolare si verificherà una forte diminuzione del parametro B il quale tenderà a diventare $B<<1$.
In teoria, in un tempo infinito, accadrà che B tenderà a zero, cioè le coppelle tenderanno a sparire dalla superficie della roccia a causa dell'usura.
Il modello matematico, peraltro molto grezzo, che ne deriva e' tale per cui se Eo e' l'età media della configurazione delle coppelle presenti sulla roccia allora potremmo aspettarci un legame tra B ed Eo del tipo: $B \sim \exp(- a Eo)$
quindi un volta che sia stato misurato sperimentalmente B sarebbe teoricamente possibile stimare l'età' della configurazione mediante la relazione inversa:

$$Eo \sim -\ln(B) / a$$

in cui a e' una quantità che deve essere determinata teoricamente e calibrata a livello sperimentale e su cui allo stadio attuale e' impossibile avanzare ipotesi.
In ogni caso sono attualmente in corso ricerche per approfondire questo aspetto del problema della datazione dei *pattern* di coppelle presenti sulle rocce. Dai risultati preliminari appare sempre più evidente che la complessità e la non linearità del problema sono tali che la potenza di elaborazione tipica delle reti neuronali artificiali potrebbe rivelarsi determinante ai fini della messa a punto di una soluzione, almeno approssimata, del fondamentale problema della datazione.

BIBLIOGRAFIA

HAYKIN S.

1994 "*Neural Networks: A Comprehensive Foundations*", McMillan, New York.

PROAKIS J.

1988 "*Digital Communications*", McGraw Hill, New York.

TAYLOR R.

1986 "Introduzione alla Teoria degli Errori", Zanichelli Bologna